Квазиконформные отображения поверхности, порожденные ее изометрическими преобразованиями, и изгибания поверхности на себя*

И. Х. САБИТОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Аннотация

Доказывается, что каждая поверхность S^*, изометричная данной компактной поверхности S и расположенная достаточно близко к ней, порождает квазиконформное отображение S на себя. Отправляясь от этого результата, устанавливается, что компактная поверхность, допускающая изгибания скольжения по самой себе, имеет топологический тип сферы или тора, и ее внутренняя метрика является метрикой вращения.

Abstract

I. Kh. Sabitov, Quasi-conformal mappings of a surface generated by its isometric transformation, and bendings of the surface onto itself, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **1**(1995), 281–288.

It is proved that any surface S^* isometric to a given compact surface S and disposed sufficiently close to S generates a quasi-conformal mapping of S onto itself. On the base of this result it is proved that a compact surface admitting sliding bendings onto itself is topologically a sphere or a torus and its intrinsic metric is of rotation type.

Общее наблюдение: в каждой задаче об изгибании поверхности есть эллиптическая часть.

1. Цель работы — проиллюстрировать вынесенное в эпиграф утверждение в случае изгибания или, что более общо, изометрического преобразования замкнутой поверхности произвольного топологического типа и дать как приложение решение одной старой проблемы о поверхностях, допускающих изгибания скольжения по самим себе. Конечно, для нетривиальных изгибаний поверхности проводимые рассуждения могут оказаться чисто гипотетическими, так как пока не известно ни одной замкнутой поверхности, которая допускала бы достаточно регулярные изгибания, но именно эти рассуждения, если они приведут к противоречию, и докажут неизгибаемость замкнутой поверхности.

Итак, пусть M — двумерное компактное риманово многообразие с конформным атласом, в котором в каждой карте метрика имеем вид

$$ds^2 = \lambda^2(x, y)(dx^2 + dy^2). \tag{1}$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, проект N 93-01-00154, и программы “Университеты России”, проект N 1.4.15.

Далее, пусть S и S^* — два изометричных погружения M в R^3 гладкости C^2 или выше, причем S^* расположена в достаточно близкой окрестности S, определяемой условием, чтобы S^* локально можно было однолистно проектировать на S ортогонально к S. В этом предположении радиус-вектор r^* поверхности S^* имеет два представления:

$$r^* = r - hn, \tag{2}$$

$$r^* = r + U, \tag{3}$$

где r — радиус-вектор поверхности S, n — единичная нормаль к S, h — длина (со знаком) отрезка нормали от S до ее пересечения с S^*, а U — вектор деформации, соединяющий соответствующие по изометрии точки на S и S^*. В этих двух уравнениях, однако, значения векторов в правых частях берутся в разных точках поверхности S. Именно, точке $P^* \in S^*$ в (2) соответствует точка $P \in S$, в которую попадает нормаль к S, опущенная на S из точки P^*. Той же точке P^* в (3) соответствует точка $\tilde{P} \in S$, имеющая на M тот же прообраз, что и P^*. Следовательно, получаем отображение $z\colon M \to M$, определяемое как $z(P) = \tilde{P}$. Покажем, что это отображение является квазиконформным отображением, удовлетворяющим некоторой системе Бельтрами.

Пусть $(x,\, y)$ — внутренние координаты точки $\tilde{P}$, а $(\xi,\, \eta)$ — координаты точки P в одной и той же карте атласа на M. Сначала разберем вопрос о гладкости отображения z. Чтобы не усложнять вопрос очевидными, но излишне подробными рассмотрениями всевозможных вариантов, предположим пока, что обе поверхности S и S^* имеют одинаковую гладкость класса $C^{n,\alpha}$, $n \geqslant 2$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, или обе они аналитичны. Из (2) и (3) имеем

$$r(x(\xi,\, \eta),\, y(\xi,\, \eta)) + U(x(\xi,\, \eta),\, y(\xi,\, \eta)) = r(\xi,\, \eta) - h(\xi,\, \eta)n(\xi,\, \eta). \tag{4}$$

Умножая это соотношение на $r_1 = \partial r/\partial\xi$, $r_2 = \partial r/\partial\eta$, получим систему из двух уравнений

$$F_i(x,\, y;\, \xi,\, \eta) \equiv (r(x,\, y) + U(x,\, y))r_i(\xi,\, \eta) - r(\xi,\, \eta)r_i(\xi,\, \eta) = 0, \quad i = 1, 2,$$

для которой якобиан $\det\left(\partial(F_1,\, F_2)/\partial(x,\, y)\right) \neq 0$ (если вектор деформации U достаточно мал) и которая поэтому определяет x и y как неявную функцию от ξ и η гладкости $C^{n-1,\alpha}$. Тогда из (2) получаем, что и функция $h(\xi,\, \eta) \in C^{n-1,\alpha}$.

Теперь мы можем вычислить метрику поверхности S^* в координатах $(\xi,\, \eta)$. Получим

$$\begin{aligned} ds^{*2} &= (\lambda^2 + 2hL + (2HL - K\lambda^2)h^2 + h_\xi^2)d\xi^2 + \\ &+ 2(2hM + 2HMh^2 + h_\xi h_\eta)d\xi d\eta + (\lambda^2 + 2hN + (2HN - K\lambda^2)h^2 + h_\eta^2)d\eta^2, \end{aligned} \tag{5}$$

где, как обычно, H и K — средняя и гауссова кривизны, L, M и N — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S. С другой стороны, метрика ds^{*2}, вычисленная в координатах $(x,\, y)$, имеет вид (1). Следовательно, (1) является канонической формой для метрики (5), поэтому в пределах одной карты функция $z = x + iy = z(\zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$, удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$\frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}} = q(\zeta)\frac{\partial z}{\partial\zeta}, \tag{6}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\bar\zeta}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi}+i\dfrac{\partial}{\partial\eta}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial\zeta}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi}-i\dfrac{\partial}{\partial\eta}\right)$,

$$q(\zeta)=\frac{(L-N+2iM)h+H(L-N+2iM)h^2+2(\partial h/\partial\bar\zeta)^2}{[1+2Hh+(2H^2-K)h^2+2|\partial h/\partial\zeta|^2\lambda^{-2}+\sqrt{\Delta(\xi,\,\eta)}]\lambda^2(\xi,\,\eta)},$$

$$\begin{aligned}\Delta=1+4Hh+(4H^2+2K)h^2+4|\partial h/\partial\zeta|^2\lambda^{-2}&+\\ +4KHh^3+K^2h^4+2(Lh_\eta^2-2Mh_\xi h_\eta+Nh_\xi^2)h\lambda^{-4}&+\\ +((2HL-K\lambda^2)h_\eta^2-4HMh_\xi h_\eta+(2HN-K\lambda^2)h_\xi^2)h^2\lambda^{-4}&.\end{aligned}$$

(Отметим, что группа слагаемых в Δ, содержащих суммарную четвертую степень относительно h и ее производных, в общей сумме всегда неотрицательна.)

Учитывая, что метрика (5) после перехода от $(\xi,\,\eta)$ к $(x,\,y)$ должна совпасть с (1), получаем, что функция $h(\xi,\,\eta)$ и отображение $z(\zeta)$ должны удовлетворять еще следующему условию

$$\begin{aligned}&\lambda^2(x(\xi,\,\eta),\,y(\xi,\,\eta))=\\ &\qquad=\lambda^2(\xi,\,\eta)\frac{1+2Hh+(2H^2-K)h^2+2|\partial h/\partial\zeta|^2\lambda^{-2}+\sqrt{\Delta(\xi,\,\eta)}}{2|\partial z/\partial\zeta|^2}.\end{aligned}\tag{7}$$

Таким образом, отображения $S\ni P(\xi,\,\eta)\to P^*(\xi,\,\eta)\in S^*$ и $S^*\ni P^*(\xi,\,\eta)\to\to\tilde P(x,\,y)\in S$ определяют гомеоморфное решение $z=z(\zeta)$ системы Бельтрами (6). В силу очевидной биективности отображения $P\to\tilde P$ на всей поверхности S имеем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть S и S^* — две компактные, изометричные, погруженные в R^3 поверхности гладкости $C^{n,\alpha}$, $n\geqslant 2$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Пусть S^* расположена достаточно близко к S, так что возможно представление* (2) *с $\Delta>0$. Тогда каждой такой поверхности S^* соответствует квазиконформное отображение поверхности S на себя, удовлетворяющее в пределах каждой карты уравнению* (6) *с равенством* (7).

Замечания о гладкости. 1. От поверхности S^* на самом деле можно требовать меньшую гладкость, а именно, достаточна гладкость класса $C^{m,\beta}$, $m\geqslant 1$, $0\leqslant\beta\leqslant 1$. Тогда гладкость функции h определяется очевидным образом, и она будет не ниже чем C^1. 2. Гладкость отображения $S\to S$ определяется по известным теоремам о гладкости решений системы (6) в зависимости от гладкости коэффициента $q(\zeta)$, см. [1].

Замечания об изгибаниях. 1. При изгибаниях поверхности S, задаваемых векторным полем деформации $U(x,\,y;\,t)$, t — параметр деформации, поверхности $S^*(t)$ при малых значениях t по близости расположения удовлетворяют условию теоремы и поэтому изгибания S определяют непрерывное семейство квазиконформных отображений поверхности S на себя, гомотопное тождественному отображению. Геометрически траектория каждой точки P поверхности представляет собой точки $\tilde P(t)\in S$, образы которых при изгибании лежат на поверхности $S^*(t)$ в пересечении ее с нормалью к S в точке P. Более наглядным представляется геометрическое описание отображения $\zeta(z)$, обратного к рассматриваемому квазиконформному отображению $z(\zeta)$: траектория $P(t)\in S$ точки $\tilde P$ представляет собой ортогональную проекцию на S "настоящей" траектории точки $\tilde{P}$ в пространстве в процессе изгибания поверхности S. 2. Ввиду особого положения с изгибаниями класса гладкости C^1, стоит упомянуть о том, что согласно замечанию 1 о гладкости все рассмотрения верны и для изгибаний гладкости C^1, лишь бы сама поверхность S была гладкости C^2 или выше. 3. Вообще говоря, поверхности S и $S^*(t)$ при любых допустимых t равноправны (если $S^*(t)$ имеют гладкость C^2), поэтому на самом деле на исходном многообразии M можно построить много квазиконформных отображений M на себя в зависимости от того, какая поверхность $S^*(t)$ взята за базовую.

2. Применим теперь полученную теорему к решению следующего вопроса: каково строение компактной поверхности, допускающей изгибания, при которых поверхность скользит сама по себе (или, по-другому, в процессе изгибания точки поверхности описывают траектории, целиком лежащие на исходной поверхности)? Вопрос этот сформулирован, например, в [2], и там же в локальном варианте при некоторых дополнительных предположениях на поле изгибания показано, что поверхность должна иметь метрику поверхности вращения (аналогичный результат для бесконечно малых изгибаний получен ранее в [3]). В [2] высказано предположение, что если компактная поверхность "в целом" допускает изгибание на себя, то она изометрична поверхности вращения. Мы здесь доказываем это предположение в следующей форме.

Теорема 2. *Пусть погруженная в R^3 компактная поверхность топологического рода g допускает изгибания скольжения по себе. Тогда $g \leqslant 1$, и поверхность изометрична соответственно или сфере, или тору с метрикой вращения.*

Доказательство. В случае изгибаний скольжения поверхности S по самой себе функция h в (2) тождественно равна нулю, поэтому в (6) коэффициент $g = 0$. Значит, отображение $z = z(\zeta)$ является конформным отображением, конформно гомотопным тождественному, а в таком случае при $g \geqslant 2$ само отображение $z(\zeta)$ является тождественным. Рассмотрим случай $g = 0$. Тогда поверхность S конформно эквивалентна сфере, и отображение $z(\zeta, t)$, где t — параметр деформации, является дробно-линейным как конформное отображение комплексной плоскости на себя. Сначала предположим, что $z(\zeta, t)$ при некотором $t = t_0$ имеет одну неподвижную точку. Выберем на M карту так, чтобы этой неподвижной точке соответствовало значение $\zeta = 0$; тогда $z = a\zeta/(a + b\zeta)$. В силу (7) коэффициент $\Lambda = \lambda^2$ удовлетворяет условию

$$\Lambda\left(\frac{a\zeta}{a+b\zeta}\right) = \frac{\Lambda(\zeta)|a+b\zeta|^4}{|a|^4}. \tag{8}$$

При $\zeta \to \infty$ метрический коэффициент имеет разложение

$$\Lambda(\zeta) \sim 1/|\zeta|^4.$$

Тогда из (8) при $\zeta \to -a/b$ получаем

$$\Lambda(-a/b) = |b/a|^4.$$

Положив в (8) $\zeta = a\tilde{\zeta}/(a + b\tilde{\zeta})$, имеем

$$\Lambda\left(\frac{a\zeta}{a + 2b\zeta}\right) = \frac{\Lambda(\zeta)|a + 2b\zeta|^4}{|a|^4}. \tag{8'}$$

Устремив здесь $\tilde{\zeta}$ к $-a/2b$, получаем

$$\Lambda(-a/2b) = 16|b/a|^4.$$

После n-кратного повторения аналогичной замены в $(8')$ и перехода к пределу при $\zeta \to -a/nb$ получаем равенство

$$\Lambda(-a/nb) = n^4|b/a|^4.$$

Значит, если $b(t_0) \neq 0$, то при $n \to \infty$ получаем $\Lambda(0) = \infty$, следовательно, случай с одной неподвижной точкой невозможен.

Пусть теперь $z(\zeta,\, t) = \dfrac{a(t)\zeta + b(t)}{c(t)\zeta + d(t)}$ имеет при каждом t две неподвижные точки. Так как $a(0)/d(0) = 1$, $b(0) = c(0) = 0$, то это отображение можем представить в виде $z = \dfrac{a(t)\zeta + b(t)}{c(t)\zeta + 1}$. При использовании факта наличия неподвижных точек надо помнить, что существующая для каждого отображения пара неподвижных точек зависит, вообще говоря, от t, и поэтому она не остается как фиксированная пара на исходной поверхности S или на M. Зафиксируем некоторое $t = t_0$ и выберем на S исходную параметризацию так, чтобы неподвижным точкам соответствовали значения $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$, так что соответствующее отображение будет иметь вид $z = a\zeta$. Значение параметра $t = t_0$ мы выберем, однако, не случайно, а некоторым специальным образом, пользуясь непрерывностью изгибания по параметру. Найдем неподвижные точки $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ отображения $z(\zeta,\, t)$. Пусть сначала $c(t) \equiv 0$. Тогда одна неподвижная точка $\zeta_1 = \infty$ постоянна на S, а другая $\zeta_2(t) = b(t)/(1 - a(t))$, причем $a(t) \neq 1$ при $t \neq 0$, иначе неподвижная точка была бы единственной, что, как мы видели выше, невозможно. Сделаем на M замену карты, положив $\tilde{\zeta} = \zeta - b/(1 - a)$. Соответственно координата z тоже преобразится по такому же закону: $\tilde{z} = z - b/(1 - a)$. В преобразованной карте отображение $\tilde{\zeta} \to \tilde{z}$ принимает вид $\tilde{z} = a(t)\tilde{\zeta}$. Тогда для метрического коэффициента Λ имеем

$$\Lambda(a\tilde{\zeta}) = \Lambda(\tilde{\zeta})/|a|^2 \tag{8''}$$

(вообще говоря, нужно было бы писать $\tilde{\Lambda}$, но мы оставляем общее обозначение метрического коэффициента). При $\tilde{\zeta} \to \infty$ имеем $\Lambda(\tilde{\zeta}) \sim C/|\tilde{\zeta}|^4$, где $C = Const$. Отсюда и из $(8'')$ получаем, что $|a(t)| = 1$, т. е. $a(t) = e^{i\theta(t)}$. Так как $a(t) \neq 1$ при $t \neq 0$ и $a(0) = 1$, то найдется значение $t = t_0$, для которого $\theta(t_0) = 2\pi\alpha$, где α — иррациональное. Предполагаем, что в проведенной на S замене координат $\zeta \to \tilde{\zeta}$ коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ взяты именно при этом значении параметра. Тогда из $(8'')$ имеем $\Lambda(e^{2\pi i\alpha}\tilde{\zeta}) = \Lambda(\tilde{\zeta})$, и так как углы вида $2n\pi\alpha$ составляют на окружности всюду плотное множество, то из полученного равенства итерациями и с учетом непрерывности Λ получаем, что для любого $\varphi \in [0, 2\pi)$ верно равенство $\Lambda(e^{i\varphi}\tilde{\zeta}) = \Lambda(\tilde{\zeta})$, т. е. в введенной системе координат метрика имеет вид метрики вращения.

Рассмотрим теперь случай $c(t) \not\equiv 0$. Тогда найдется интервал, на котором $c(t) \neq 0$. На нем отображение $z(\zeta, t)$ имеет неподвижные точки $\zeta_1(t) = (a - 1 + \sqrt{(a-1)^2 + 4bc})/2c$ и $\zeta_2(t) = (a - 1 - \sqrt{(a-1)^2 + 4bc})/2c$. Сделав на S замену переменной $\tilde{\zeta} = (\zeta - \zeta_1)/(\zeta - \zeta_2)$ и соответственно $\tilde{z} = (z - \zeta_1)/(z - \zeta_2)$, получим отображение $\tilde{z} = A\tilde{\zeta}$, где

$$A = (a + 1 - \sqrt{(a-1)^2 + 4bc})/(a + 1 + \sqrt{(a-1)^2 + 4bc}).$$

Так как $\zeta_1(t) \neq \zeta_2(t)$, то $A(t) \neq 1$, но $A(0) = 1$, поэтому дальше можно повторить те же рассуждения, что и при работе с $(8'')$.

Рассмотрим случай $g = 1$. Тогда многообразие M конформно эквивалентно тору, а конформные отображения $z(\zeta)$ тора на себя имеют вид $z = \zeta + B$. Следовательно, (7) дает следующее условие на Λ:

$$\Lambda(\zeta + B) = \Lambda(\zeta). \tag{9}$$

Кроме того,

$$\Lambda(\zeta) = \Lambda(\zeta + n\omega_1 + m\omega_2), \tag{10}$$

где n и m — целые числа, а ω_1, ω_2 — периоды, определяющие решетку тора на плоскости. Пусть ω_1 и ω_2 представлены как векторы $(\gamma, 0)$ и (α, β) соответственно, причем $\beta > 0$. Покажем, что траектория сдвига $B(t) = B_1 + iB_2$, $B(0) = 0$, идет по направлению некоторого постоянного вектора. Действительно, пусть участок линии $B(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ представляет собой некоторую кривую ?, не лежащую на прямой. В силу закона отображения $z = \zeta x + B$ траектория любой точки ζ имеет вид кривой ?, только начало ее будет в точке ζ. В силу (9) на каждой такой траектории коэффициент Λ постоянен. Рассмотрим, в частности, траекторию точки $\zeta = 0$. На ней $\Lambda(B(t)) = \Lambda(0) = Const$. Так как она не лежит на прямой, то при любом ε найдутся две точки $\zeta_1 = B(t_1)$ и $\zeta_2 = B(t_2)$, $0 < t_1 < t_2 < \varepsilon$, такие что векторы T_1 и T_2 с началом в $\zeta = 0$ и с концами в ζ_1 и ζ_2 не коллинеарны и $\Lambda(\zeta_1) = \Lambda(\zeta_2) = \Lambda(0)$. Траектория каждой точки ζ_1 и ζ_2, в свою очередь, имеет вид кривой ?, поэтому на этих траекториях $\Lambda(\zeta)$ тоже равен $\Lambda(0)$, и на концах векторов T_1 и T_2, отложенных из ζ_1 и ζ_2, Λ также имеет значение $\Lambda(0)$. Продолжая это рассмотрение, мы в итоге покроем фундаментальный параллелограмм целочисленной решеткой с образующими T_1 и T_2. В узлах решетки $\Lambda = \Lambda(0)$. Беря t_1 и t_2 достаточно близкими к нулю, мы можем взять T_1 и T_2 настолько малыми, чтобы узлы решетки образовывали в фундаментальном параллелограмме ε-сеть с любым наперед заданным малым значением ε. Тем самым мы получим, что на всем фундаментальном параллелограмме $\Lambda = Const$, т. е. метрика тора плоская, а такой тор в R^3 не существует.

Итак, траектория каждой точки ζ идет по отрезку прямой. Пусть $B = B_1 + iB_2$, $B_1(t) = ac(t)$, $B_2(t) = bc(t)$, a и b — постоянные, $a^2 + b^2 = 1$. Вдоль прямых $b\xi - a\eta = Const$ коэффициент $\Lambda = Const$, следовательно, Λ имеет вид $\Lambda(\xi, \eta) = f(x)$, $x = b\xi - a\eta$. Сделав конформную замену $u = b\xi - a\eta$, $v = a\xi + b\eta$, получаем метрику вида $ds^2 = \lambda^2(u)(du^2 + dv^2)$, т. е. поверхность S локально имеет метрику поверхности вращения.

Установим теперь вид этой метрики в целом. Мы утверждаем, что прямые, вдоль которых $\Lambda = Const$, имеют направления, которые, за исключением счетного числа направлений, параллельны одной из сторон фундаментального параллелограмма тора.

Рассмотрим возможные случаи.

1. $b = 0$. Тогда $\Lambda(\xi, \eta) = \Lambda(\eta)$, т. е. Λ постоянен вдоль линий $\eta = Const$, параллельных одной паре сторон фундаментального параллелограмма, и имеет период β. Эти линии играют роль замкнутых параллелей.

2. $b\alpha - a\beta = 0$ или $(a, b) \| (\alpha, \beta)$. Коэффициент Λ постоянен вдоль прямых $b\xi - a\eta = Const$ и поэтому он определяется значениями на пересечениях этих прямых с осью ξ, т. е. $\Lambda(\xi, \eta) = f(x)$, $x = \xi - a\eta/b$. Тогда из (10) имеем

$$\Lambda(\xi, \eta) = f(\xi - a\eta/b) = f(\xi + m\alpha + n\gamma - a(\eta + m\beta)/b). \tag{11}$$

В нашем случае

$$f(\xi - a\eta/b) = f(\xi - a\eta/b + n\gamma).$$

Следовательно, Λ постоянен вдоль прямых, параллельных другой паре сторон фундаментального параллелограмма, и имеет период γ при горизонтальных сдвигах. Отрезки прямых $b\xi - a\eta = Const$ в пределах параллелограмма играют роль замкнутых параллелей.

3. Прямые $b\xi - a\eta = Const$ не параллельны ни одной паре сторон фундаментального параллелограмма. Из (11) при $m = 0$ имеем $f(x) = f(x + n\gamma)$, т. е. f имеет период $T_1 = \gamma$. С другой стороны, при $n = 0$ имеем $f(x) = f(x + m(b\alpha - a\beta)/b)$, т. е. другой период $T_2 = (b\alpha - a\beta)/b$. Эти два периода должны быть соизмеримы, иначе $\Lambda \equiv Const$. Значит, найдутся m_0, $n_0 \in \mathbb{Z}$, для которых $m_0(b\alpha - a\beta) = n_0\gamma$, откуда

$$a/b = \alpha/\beta - (\gamma n_0)/(\beta m_0). \tag{12}$$

Следовательно, таких направлений $a : b$ может существовать лишь счетное число, и все они определяются соотношением (12). В этих исключительных случаях параллели — линии $\Lambda = Const$ — идут параллельно прямым $\xi = a\eta/b$, пересекая стороны фундаментального параллелограмма конечное число раз, пока не вернутся в исходную точку (подсчитать это число нетрудно), т. е. как циклы они не гомологичны ни одной из сторон фундаментального параллелограмма, а являются их линейной комбинацией. Заметим, что про изометрические погружения в R^3 указанных в случае 3 метрик ничего не известно. Более того, если гипотеза о неизгибаемости компактных поверхностей верна, то таких поверхностей не должно быть.

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что мы использовали лишь следующие предположения о гладкости: поверхность S принадлежит классу гладкости C^1, а метрический коэффициент λ непрерывен, а для зависимости деформации от параметра требуется лишь непрерывность.

3. Утверждение теоремы 2 верно также и для поверхностей класса гладкости C^1, допускающих тангенциальные бесконечно малые изгибания, для которых поле б. м. изгибания всюду касательно к поверхности. Доказательство получается из тех же соображений, что и для теоремы 2: сначала устанавливаем, что в разложении $h = th_1 + o(t)$, $t \to 0$, функция $h_1 \equiv 0$, тогда получается, что отображение $z = z(\zeta)$ имеет конформную главную часть $z = z_0(\zeta)$, а после этого повторяем доказательство теоремы 2.

Литература

[1] И. Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции — М.: Физматгиз, 1959. — 628 с.

[2] M. Spivak. A comprehensive introduction to Differential Geometry, v. 5. — Berkeley: Publish or Perish. — 1979. — 661 p.

[3] E. Rembs. Infinitesimal Verbiegungen von Flächen in sich // Math. Nachr. — 1957. — B. 16. — S. 134–136.

Поступило в редакцию: январь 1995.