В. В. Самарин,
доцент кафедры информатики Чебоксарского кооперативного института — филиала Московского университета потребительской кооперации

РЕШЕНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ СРЕДСТВАМИ MATHCAD*

Целочисленное линейное программирование: задача оптимизации производства

В ряде задач линейного программирования существуют ограничения на целочисленность ответа, например представляющего собой количество изделий. Алгоритмы решения таких задач приведены в [5]. В методе ветвей и границ производится ветвление исходной задачи A_o по определенным правилам на несколько задач A_i, $i = 0, 1,2, ...$ (непосредственных потомков).

Каждая из этих задач решается и, в зависимости от полученного решения, либо делится, либо нет, в свою очередь, на подзадачи. Причем все эти задачи являются так называемыми релаксированными (ослабленными) — в них отбрасывается требование целочисленности решения. Кроме того, задачи должны быть непротиворечивы. Таким образом, мы имеем процесс построения дерева релаксированных задач. Данный процесс заканчивается при получении оптимальных целочисленных решений.

Опишем правила ветвления задач на подзадачи.

Если решение x_j релаксированной исходной задачи оказывается целочисленным, то процесс заканчивается. В противном случае начинается процесс ветвления исходной задачи на несколько задач. Пусть a_j — целая часть x_{jt} тогда ветвление осуществляется добавлением к условиям исходной задачи ограничений $x_j \leq a_j$ для задачи A_1 и $x_j \geq a_j + 1$ для задачи A_2. Эти задачи решаются. Затем, если получены целочисленные решения, из них выбираются те, которые дают оптимальное (минимальное или максимальное) значение целевой функции. Эти решения называются рекордными. Далее задачи, решения которых не целочисленны, ветвятся по тем же правилам. Полученные решения (целочисленные и нецелочисленные) сравниваются с рекордными в плане оптимальности значения целевой функции. Если очередное решение менее оптимально, чем рекордное, процесс построения данной ветви заканчивается. В противном случае рекордными становятся новые, более оптимальные целочисленные решения (менее оптимальные исключаются из списка рекордных), а нецелочисленные ветвятся дальше. В конце концов ветвление заканчивается. Следовательно, задача решена, и ее решениями являются рекордные решения.

Сочетание мощного математического ядра и графического редактора системы MathCAD создает благоприятные условия для анализа и полного решения таких задач. Наглядные графики позволяют сразу увидеть целочисленные решения до окончания действия алгоритма. Таким образом, эффективность применения системы MathCAD в значительной степени усиливается благодаря человеческому фактору.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу оптимизации производства, решенную средствами Excel 2000 в работе [2]: «На производство изделий моделей *Am B* необходимо соответственно 3 и 4 единицы сырья, а также 0,2 и 0,5 часа рабочего времени. Недельный объем поставок сырья — 1700 единиц, недельное рабочее время — 150 часов. Прибыль от реализаций изделия модели А составляет 1 единицу, изделия модели *B* — 2 единицы. Требуется найти количества *x* и *y* изделий А и *B,* при которых прибыль от их производства максимальна».

---

* Окончание. Начало см.: Информатика и образование. 2002. N» 12.

Приведем документ MathCAD, содержащий решение задачи. Ее анализу помогает графическое представление допустимой области значений переменных, изображенной на рисунке (см. ниже).

Задача оптимизации производства

1. Постановка задачи

Затраты сырья на изготовление изделий моделей А и В za = 3 zb = 4

Прибыль от изготовления изделий моделей А и В pa = 1 pb = 2

Время на изготовление изделий моделей А и В, ч ta = 0.2 tb = 0.5

Предел продолжительности работы, ч tm = 150

Поставки сырья v = 1700

Общая прибыль (целевая функция) f(x, y) = pa·x + pb·y

2. Применение метода ветвей и границ:

2.1. Исходная задача A_0

Начальное приближение (для всех задач) x := 1 y := 1

Решение релаксированной задачи линейного программирования (нецелочисленной):

Given

Ограничения: расход сырья za·x + zb·y ≤ v

затраты времени, ч ta·x + tb·y ≤ tm

Условия неотрицательности объема продукции x ≥ 0 y ≥ 0

Максимизация: C := Maximize(f,x,y)

Ответ $C = \begin{bmatrix} 357.14286 \\ 157.14286 \end{bmatrix}$ x0 := C_0 y0 := C_1 x0 := 357.14286 y0 := 157.14286

Максимальная прибыль F0 := f(x0, y0) f0 = 671.42857

2.2. Ветвление исходной задачи

Целые части оптимального решения a0 := floor (x0) b0 := floor (y0)

a0 = 357 b0 = 157.

Задача разветвляется на три потомка со следующими дополнительными ограничениями:

A_1 x ≤ a0, y ≤ b0; A_2 x ≤ a0, y ≥ b0 + 1; A_3 x ≥ a0 + 1, y ≤ b0.

Еще одна возможность x ≥ a0 + 1, y ≥ a0 + 1 приводит к противоречивой задаче, поскольку в точке этой области, где минимальны расход сырья и необходимое время, они превышают поставленные ограничения

za·(a0 + 1) + zb·(b0 + 1) = 1706 ta·(a0 + 1) + tb·(b0 + 1) = 150.6

Разделы документа, содержащие решения последующих задач, получены копированием пункта 2.1 с включением дополнительных ограничений.

2.3. Первая разветвленная задача A_1 x ≤ a0, y ≤ b0.

Решение:

Given

Расход сырья za·x + zb·y ≤ v

Затраты времени ta·x + tb·y ≤ tm

Условия неотрицательности объема продукции x ≥ 0 y ≥ 0

Дополнительные ограничения x ≤ a0 y ≤ b0

Максимизация: C := Maximize(f,x,y)

Ответ $C = \begin{bmatrix} 357 \\ 157 \end{bmatrix}$ x1 := C_0 y1 := C_1 x1 := 357 y1 := 157.

Прибыль F1 := f(x1,y1) F1 = 671.

Найденное решение является целочисленным и принимается за первое рекордное решение. Дальнейшего ветвления задачи A_1 нет.

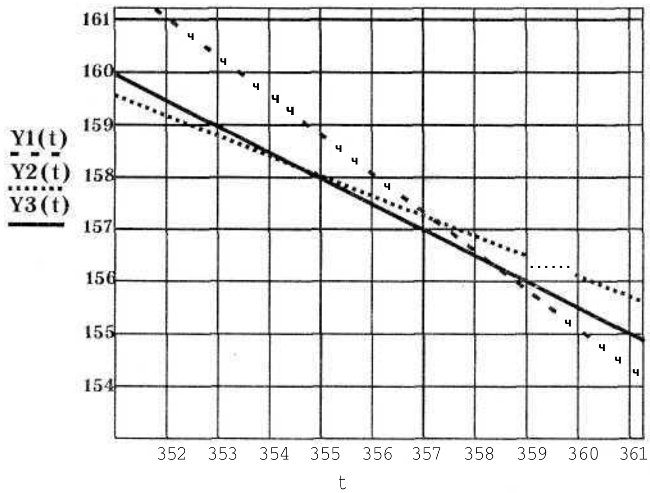
2.4. Геометрическая интерпретация задачи.

Часть допустимой области вблизи первого рекордного решения показана на рисунке, построенном при переобозначении t = x с помощью знака Декартов график палитры Графики. Границы допустимой области определяют штриховая и точечная прямые с уравнениями

$$Y1(x) := \frac{(v - za \cdot x)}{zb} \qquad Y2(x) := \frac{(tm - ta \cdot x)}{tb}$$

Целевая функция определяется уравнением прямой

$$Y3(x) := \frac{(F1 - pa \cdot x)}{pb}$$



Эта прямая в области решения проходит через две целочисленные точки: x = 357, y = 157 и x = 355, y = 158, определяемые ниже при дальнейшем выполнении алгоритма. Из рисунка видна противоречивость задачи с дополнительными условиями x ≤ aj + 1, y ≥ bj + 1, определяющими область, не пересекающуюся с допустимой областью.

2.5. Вторая разветвленная задача A_2 x ≤ a0, y ≥ ЬО + 1.

Given

Расход сырья	za·x + zb·y ≤ v
Затраты времени	ta·x + tb·y ≤ tm
Условия неотрицательности объема продукции	x ≥ 0 y ≥ 0
Дополнительные ограничения	x ≤ a0 y ≥ ЬО + 1
Максимизация:	C := Maximize(f,x,y)

Ответ $C = \begin{bmatrix} 355 \\ 158 \end{bmatrix}$ x2 := C_0 y2 := C_1 x2 = 355 y2 = 158.

Прибыль F2 := f(x2,y2) F2 = 671.

Найденное решение является целочисленным. Поскольку значение целевой функции для него равно рекордному, оно принимается за второе рекордное решение. Дальнейшего ветвления задачи A_2 нет.

2.6 Третья разветвленная задача A_3 x ≥ a0, y ≤ ЬО.

Given

Расход сырья	za·x + zb·y ≤ v

Затраты времени $ta \cdot x + tb \cdot y \le tm$

Условия неотрицательности объема продукции $x \ge 0 \quad y \ge 0$

Дополнительные ограничения $x \le a0 \quad y \le b0$

Максимизация: $C := \mathrm{Maximize}(f,x,y)$

Ответ $C = \begin{bmatrix} 358 \\ 156.5 \end{bmatrix}$ $x3 := C_0 \quad y3 := C_1 \quad x3 = 358 \quad y3 = 156.5.$

Прибыль $F3 := f(x3,y3) \quad F3 = 671.$

Целые части оптимального решения $a3 := \mathrm{floor}(x3) \quad b3 := \mathrm{floor}(y3) \quad a3 = 358 \quad b3 = 156.$

Найденное решение не является полностью целочисленным, поэтому требуется провести дальнейшее ветвление задачи A_3. Непротиворечивой является единственная задача-потомок A_4 $x \ge a3$, $y \le b3$.

2.7. Четвертая разветвленная задача A_4

Given

Расход сырья $za \cdot x + zb \cdot y \le v$

Затраты времени $ta \cdot x + tb \cdot y \le tm$

Условия неотрицательности объема продукции $x \ge 0 \quad y \ge 0$

Дополнительные ограничения $x \le a3 \quad y \le b3$

Максимизация: $C := \mathrm{Maximize}(f,x,y)$

Ответ $C = \begin{bmatrix} 358.666671 \\ 156 \end{bmatrix}$ $x4 := C_0 \quad y4 := C_1 \quad x4 := 358.66667 \quad y4 := 156.$

Прибыль $F4 := f(x4,y4) \quad F4 = 670.66667$

Прибыль для точки (x4,y4) меньше, чем для первого и второго рекордных решений, поэтому данная ветвь дальше не продолжается. На этом выполнение алгоритма завершается.

3. Таким образом, поставленная задача имеет два целочисленных оптимальных решения, соответствующих двум рекордным решениям

$x1 = 357 \quad y1 = 157$ и $x2 = 355 \quad y2 = 158$

с одинаковыми значениями целевой функции $F = 671$.

Литература

1. *Гарнаев А.* Excel, VBA, Internet в экономике и финансах. СПб.: БХВ-Санкт-Петербург, 2001.
2. *Крюкова Л. Ю., Бегенин В. Г.* Решение прикладных экономико-математических задач средствами табличного процессора// Информатика и образование. 2001. № 2.
3. *Дьяконов В.* MathCAD 2000: учебный курс. СПб.: Питер, 2001.
4. *Корнилов П. А., Плясунова У. В.* Создание дидактических материалов по математике в MathCAD // Информатика и образование. 2001. № *S*.
5. *Глушков В. М.* Основы безбумажной информатики. М.: Наука, 1987.
6. *Возяков В. И., Смирнова Т. Н., Смолов З. Ф., Филиппов В. П.* Спрос и предложение. Примеры компьютерного моделирования. Чебоксары: Салика, 2001.

Гуманизация образования — система мер, направленных на приоритетное развитие общекультурных компонентов в содержании образования и технологии обучения, ориентированных на совершенствование личности, занимающей центральное место в структуре общественных отношений.

Гуманизация образования предполагает формирование нового гуманистического мировоззрения, мышления, сознания личности, а также создание новых отношений между личностью, социальными группами и обществом. Это формирование социальных способностей человека в широком смысле, т. е. его способности жить в обществе по нравственным нормам, вступать в широкий круг вещественных связей, развивать свои способности к творческой деятельности. Гуманизация образования означает переход от технократической модели образования к образованию культурно нагруженному, культурно детерминированному.