

## В. В. Самарин,

доценткафедрыинформатики Чебоксарскогокооперативногоинститута Московского университетапотребительскойкооперации

## РЕШЕНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ СРЕДСТВАМИ МАТНСАD

Многие оптимизационные экономические задачи могут быть решены с помощью табличного процессора Excel, входящего в пакет Microsoft Office [1, 2]. Процесс решения, заключающийся в заполнении данными задачи ячеек таблиц, внесении в них формул, выполнении команд и заполнении диалоговых окон не является до конца автоматическим. Поэтому он не оптимален при решении больших потоков задач. Новые возможности в этом открывает MathCAD — математическая система автоматического проектирования (Mathematical Computer Aided Design) фирмы MathSoft (США), которая становится все более доступной в связи развитием компьютерной техники [3, 4]. В системе MathCAD описание решения математических задач дается с помощью привычных математических формул и знаков, а также путем обращения к специальным функциям. Среди них есть и функции Maximize, Minimize, предназначенные для решения задач оптимизации — поиска максимума и минимума функций с числом переменных до 50 в версии MathCAD 8 и до 200 в версии MathCAD 2000. В экономике решение таких задач для целевой функции, обычно являющейся линейной, позволяет снизить расходы сырья, транспортные затраты и получить наибольшую прибыль от производства товаров. Для полностью автоматического решения простейших оптимизационных задач их просто нужно записать в окне редактирования системы MathCAD, сопроводив текстовыми пояснениями [3]. Для более сложных задач система MathCAD позволяет облегчить реализацию алгоритмов линейного программирования [5], совместить средство решения с итоговым отчетом, легко перестраивающимся на другие подобные задачи. Объединение текстового, формульного и графического редакторов с вычислительным ядром позволяет готовить активные электронные документы с высоким качеством оформления (как и в редакторе Word) и способные выполнять расчеты с наглядной демонстрацией результатов. Итоговые документы могут трансформироваться в файлы форматов rtf и html и использоваться в пакете MS Office и в сетях Интернет, Intranet. Все это открывает новые возможности для решения сложных экономических задач, анализа динамических моделей в экономике, а также для подготовки и переподготовки кадров. Продемонстрируем возможности системы MathCAD на примерах.

## Транспортная задача

Сущность транспортной задачи (называемой также задачей о назначениях) состоит в минимизации целевой функции

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} ,$$

представляющей собой стоимость перевозки сырья из m пунктов поставки в n пунктов потребления, причем  $c_n$  — стоимость перевозки (тариф), а  $x_n$  — объем перевозок от £-го поставщика у'-му потребителю. Задача поиска неотрицательных значений переменных (назначений) должна решаться при n + m ограничениях типа равенств запасов сырья в пунктах поставки:

$$n = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{y} = \mathbf{i} \mathbf{i} + \mathbf{z} = \mathbf{b} \bullet \bullet \bullet \mathbf{m},$$

и потребностей потребителей:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_{j}, j = 1, \dots \pi_{-}$$

В задаче с закрытой моделью сумма запасов равна сумме потребностей:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \; .$$

Условиям рыночной экономики больше соответствует открытая модель, в которой запасы поставщиков больше или меньше потребностей.

Рассмотрим простую закрытую транспортную задачу с небольшим числом неизвестных: m = 2, n = 3. Копии экрана русифицированной системы MathCAD 8, содержащие условия и решение задачи, приведены на рис. 1,2. Для решения необходима лишь одна, показанная на рис. 1 палитра Вычисления, содержащая знаки неравенств и знак булева равенства, используемые для записи ограничений. Рядом со знаком показана всплывающая подсказка. Этот знак может быть введен также нажатием клавиши «=» вместе с клавишей Ctrl.



Puc.1

Для ввода текста следует выполнить команду Вставка, Текстовая область (или нажать клавишу двойной кавычки «"») и установить вид и размер шрифта, так же как и в текстовом редакторе Word. Для набора знака := («присвоить») достаточно нажать клавишу с двоеточием, а знак умножения (точка)) вводится при нажатии клавиши «\*».

Результаты решения, полученного с помощью функции Minimize, показаны на рис. 2. Форма представления результата устанавливается в показанном там же диалоговом окне, вызываемом командой **Формат, Результат.** 

~ N	«аг	a ^≝ •{- [*:] 法 αβ	
tomal	Anal	310 *1 * 水 3 産 豊 酒 に 注	
Миним	иизация, С-s Мпшш:e(£,к11,>	2,ĸ13,ĸ21,ĸ22,s23)</td <td>1</td>	1
Ответ. Об	љемы поставок. Потребител	и 1 2 3	
	Поставщик! xl	1 ^100 x\2 ~ 300 :d3^0	
	Поставщик 2 к21	1 = 300 x22 = 0	
Минималь	ыные затраты на перевозку D >	$f   C^{,}, C_{,y}, C_{,y}, C_{,y}, C_{,y}, C_{,y}, C_{,y}, C_{,y}, D \simeq 42000$	
C.	Рормат Результата	×	
1		C THE REAL OF LOCATION OF THE REAL OF T	
10.12		Стиль отображения	
	Io tic & no tex pi /1 2	Стиль отображения Ситех цо всях на СССТНИ	
	Io tic & 00 9. pi /2 2		
	Io tic. 6 m Sept. / 7	Стиль отображения Ситех истания (СССТРИМ) Стиль и ИССТРИМ Стиль и Автории Автометичес-ки	
	Io tic. 1 and Sept /		
	Io tic, ь ото Фиріс/1	Стиль отображения Ситеб цо на на из Срояни С С на 7. Автрии Автопиетически С Г Рольнога, во оточнова перболец Отображение единиц	
	Iortic, ь ото Фири, / 1 - 2 Срби ж. Порог экспоненты (3) (5 - 2) Конплексаный порог(10) (10 - 2)	Спиль отображения Сила Слад и после на Сротни С Спад и натри Автомнетичес-ки С Г Слад и натри Автомнетичес-ки С Спад и натри Саранана Потображение единиа Г Формат варемы	
	Io <b>·ti</b> c. 5 ото <b>9</b> крі / Л <b>2</b> Грбу ж Порог экспоненты (3) 5 <del>3</del> Конялисксный порог(10) 10 <del>1</del> Нулевой порог (15) 15 <del>3</del>	Стиль отображения Сила Сила Сила Сарании С Сила Автрии Авточнетически С Голиности востичениески С Отображение единии Г Формат единии Р Упроцеть единии по восможности	
	Io <b>·ti</b> c. ь ото <b>Ф</b> ир <b>і</b> . / Л Гріту ж. Порог экопоненты (3) 5 ± Комплексный порог(10) 10 ± Нулевой порог (15) 15 ±	Стиль отображения Ситеб но по на избратни С С на 2 натрии Автометически С С на 2 натрии Автометически С С тображение единац Отображение единац Р Упроцеть здинацы по возможности	

Рис. 2

Имеющихся текстовых пояснений в документах MathCAD достаточно, чтобы можно было легко решить и другие подобные задачи.

Для решения другой транспортной задачи достаточно изменить числовые значения в данных документах MathCAD и выполнить команду Математика, Просчитать документ.

При решении оптимизационных задач с большим числом переменных целесообразно использовать матрицы. В них с помощью палитры матричных операций, показанной на рис. 3, размещаются тарифы перевозок, начальные приближения для объемов перевозок, запасы поставщиков и потребности потребителей. Целевая функция записывается с помощью шаблона суммы (панель **Матанализ** — см. рис. 3). В качестве примера рассмотрены задачи, решенные ранее в статье [2] с помощью табличного процессора Excel. Для них приведены тексты документов MathCAD,. сохраненные в формате RTF и вставленные в документ Word.

) basenen mennen	1978)	"мидии" ицин Матрицы	Математика 🛛 🖾	Menm	×
Строки: ј3	ОК	<b>ਸ਼1</b> % ×' 🖾	Ⅲ 12 4-	4 40 4 40	60 10
Столбцы: 4	<u>Э</u> ставнть	ភ្លាក់ក្លំ មេ <sup>ង</sup> ស	$\left  \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \right  \int_{dx}^{dy} \alpha \beta$	∫°Й	II
	Удалить	€-* ≵x≩ ΣV ∰∰	<b>.</b>	I Ę J Y	lin Im
	Отмене			<b></b>	· →a-

Puc. 3

Решение закрытой транспортной задачи с тремя поставщиками и четырьмя потребителями имеет следующий вид:

## ИНФОРМАТИКА И ОБРАЗОВАНИЕ, № 12-2002

Carrier Contraction Contraction Contraction Contraction	
Документ MathCAD	Пояснения
Закрытая транспортная задача. Тарифы — стоимости перевозки продукта от поставщиков 1, 2, 3 потребителям 1, 2, 3, 4 [~2 3 5 4J е е 3 2 4 1] [Л 3 2 6]	При наборе выражения использован символ гло- бального присваивания «=» из палитры Вычис- ления, показанной на рис.1, позволяющий опре- делять переменные в любом месте документа. Мат- рица с 3 строками (поставщики) и 4 столбцами (потребители) вводится с помощью палитры Мат- рицы (см. рис. 3) или с помощью команды Встав- ка, Матрица. Так же можно добавлять строки и столбцы в уже имеющиеся матрицы.
Запасы продукта у поставщиков 1, 2 и 3 $a = \begin{bmatrix} "30] \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$	Использованы символ глобального присваивания «г» и вставка матрицы с 1 столбцом и 3 строка- ми для поставщиков и 1 столбцом и 4 строками для потребителей.
Потребности потребителей 1, 2, 3, 4 ь s $\begin{bmatrix} 20\\25\\35\\10 \end{bmatrix}$	
Общие затраты на перевозку (целевая функция) $f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \pounds & 1 \\ c_{4} \cdot , \kappa \cdot x_{\kappa} \end{pmatrix}$	При вводе целевой функции использован шаблон суммы из панели <b>Матанализ</b> (см. рис. 3). Индек- сы вводятся после нажатия клавиши « [».
$Hачальное приближение ж ≡ \begin{bmatrix} "20 \ 10 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 15 \ 25 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 10 \ 10 \end{bmatrix}$	Использованы символ локального присваивания «:=» и вставка матрицы с 3 строками (поставщи- ки) и 4 столбцами (потребители).
Вспомогательная матрица $i:=02 \ k:= -3^{-3} \ **, 3^{i=-x}$ $e = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1'' \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	Введена вспомогательная матрица с единичными элементами, число столбцов которой равно числу поставщиков, а число строк — числу потребите- лей. Вывод ее значений, осуществляемый с помо- щью знака равенства «=», не обязателен для ре- шения задачи. Символ перечисления «» вводит- ся нажатием клавиши «» или с помощью знака перечисления значений дискретной величины <b>inn</b> палитры <b>Матрицы</b> (см. рис. 3).
Given	Вычислительный блок начинается с ключевого слова Given.
равенство вывозимого продукта запасам у поставщиков (x-e) <sup>&lt;0&gt;</sup> =a	Первое ограничение записывается в виде булева равенства «=» первого столбца (с номером 0) про- изведения матриц <i>x</i> и е столбцу <i>a</i> . Выделение столбца осуществляется с помощью знака М'* палитры <b>Матрицы</b> (см. рис. 3).
равенство вывозимого продукта потреб- ностям потребителей (((e-x) <sup>r</sup> ) <sup>&lt;0&gt;</sup> =b	Здесь дополнительно использована операция транспонирования (замена местами строк и столб- цов) произведения матриц <i>х</i> <b>и</b> <i>е</i> с помощью знака М <sup>†</sup> палитры Матрицы (см. рис. 3).
Условия неотрицательности об'ъема поставок x ≥0 Минимизация: Y:= Minimize (f,x)	Функция Minimize на, ходит значения объемов пе- ревозок, соответствующих минимуму целевой функции.

45

Документ Mathcad						Пояснения								
Ответ:														
	20	0	10	0 ]								02°		
y =	0	25	5	10										
	0	0	20	0										
Мини	имали	ьные	затра	ты на	перево	эзку								
f(v)	= 2	210					Í							

46

Для перехода к решению **открытых транспортных задач** с объемом запасов у поставщиков, не равным потребностям потребителей, в документе делаются изменения, например:

Закрытая задача	Открытые задачи						
Запасы равны потребностям m n <b>IX = Xb</b> , 1=1 j=i	Запасы больше потребностей m n IX>5>, 1=1 j=i	Потребности больше запасов <sup>m</sup> <sup>n</sup> <b>IX &lt; 5</b> <sub>1=1</sub> <sub>j=i</sub>					
Запасы продукта у поставщиков 1,2 и 3 а s $\begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ в сумме равны потребностям потребителей 1, 2, 3, 4 b a $\begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 35 \\ 10 \end{bmatrix}$	Запасы продукта у поставщиков $a = \begin{bmatrix} -35\\ 40\\ 25 \end{bmatrix}$ в сумме превышают потребности потребителей $b = \begin{bmatrix} 20\\ 25\\ 35\\ 10 \end{bmatrix}$	Запасы продукта у поставщиков а & 40 20 в сумме меньше потребности потребителей ь = 25 30 40 10					
Ограничения: равенство вывозимого продукта запасам у поставщиков (x-e) <sup>-Ф</sup> = а равенство вывозимого продукта потребностям потребителей ((e-x) <sup>T</sup> ) <sup>-(0)</sup> = Ь	Ограничения: количество вывозимого продукта меньше запасов у поставщиков (x-e) <sup>⊲b</sup> ≤а равенство вывозимого продукта потребностям потребителей ((e-x) <sup>т</sup> ) < <sup>сь</sup> = Ь	Ограничения: равенство вывозимого продукта запасам у поставщиков (x-e) <sup>-0&gt;</sup> = а количество вывозимого продукта меньше потребностей потребителей ( (e-x) <sup>*</sup> ) <sup>-0&gt;</sup> =ь					
Ответ: y = 20 0 10 0 0 25 5 10 0 0 20 0 Минимальные затраты на перевозку f (y) = 210	Ответ: $y \equiv \begin{bmatrix} 20 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \end{bmatrix}$ Минимальные затраты на перевозку f (y) = 195	Ответ: y = $\begin{bmatrix} 25 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{bmatrix}$ Минимальные затраты на перевозку f (y) = 185					

Окончание следует